

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94**

Angelo Cavallucci

**ALCUNI TIPI DI PROBLEMI DEL CALCOLO DELLE
VARIAZIONI CON SOLUZIONI LIPSCHITZIANE**

12 Maggio 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. Vengono esposti alcuni risultati su esistenza e regolarità nella classe delle funzioni lipschitziane per un problema del calcolo delle variazioni, dovuti a Ambrosio, Ascenzi, Buttazzo, Clarke e Loewen

Abstract . We present some recent results on Lipschitz regularity and existence for a problem in the calculus of variations, obtained by Ambrosio, Ascenzi, Buttazzo, Clarke and Loewen

ALCUNI TIPI DI PROBLEMI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI CON SOLUZIONI LIPSCHITZIANE

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il problema

$$(P) \quad \begin{cases} \Lambda(x) := \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \longrightarrow \min \\ x(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n), \\ x(a) = \alpha, x(b) = \beta, \\ x(t) \in C \text{ per } a \leq t \leq b, \\ \dot{x}(t) \in K \text{ q.d.} \end{cases}$$

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di regolarità e di esistenza nell'ambito delle funzioni lipschitziane, dovuti a Ambrosio, Ascenzi e Buttazzo [1], a Clarke [2] e a Clarke e Loewen [5]. In tutto il seguito la funzione L , del tipo

$$[a, b] \times C \times R^n \ni (t, x, u) \longrightarrow L(t, x, u) \in [0, +\infty],$$

con C chiuso in R^n , sarà sempre convessa e inferiormente semicontinua (l.s.c.) rispetto alla variabile u .

Avremo anche occasione di considerare la seguente condizione su L

(H1) Esiste una funzione inferiormente limitata $\theta : [0, +\infty[\longrightarrow R$ tale che

$$L(t, x, u) \geq \theta(|u|) \text{ per ogni } t, x, u,$$

$$\frac{\theta(r)}{r} \longrightarrow +\infty \text{ per } r \longrightarrow +\infty.$$

Ricordiamo alcune definizioni (cfr. [3], [6], [7]). Per la funzione

$$f : R^n \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

poniamo

$$\text{dom } f = \{x \in R^n \mid f(x) < +\infty\},$$

se f è convessa e $f(x) < +\infty$ poniamo

$$\partial f(x) = \{p \in R^n \mid \forall y \in R^n : f(y) \geq f(x) + p(y - x)\},$$

se $f(x) < \infty$ e f é semicontinua inferiormente poniamo

$$\partial^{\pi} f(x) = \{p \in R^n \mid \liminf_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - p(y-x)}{|y-x|^2} > -\infty\},$$

se f é localmente lipschitziana poniamo

$$\partial f(x) = \text{co}\{\lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i) \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x\}$$

Poniamo anche per $1 \leq p \leq \infty$

$$W^{1,p}(a, b; R^n) = \{[a, b] \ni t \rightarrow c + \int_a^t v(s) ds \mid c \in R^n, v \in L^p(a, b; R^n)\}$$

e indichiamo con $Sol(P)$ l'insieme delle $x(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n)$ che risolvono il problema (P).

In [1] é provato il seguente

TEOREMA 1. Supponiamo $C = R^n = K$, L indipendente da t e boreliana. Sia $z(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n)$ tale che, per qualche $\delta > 0$,

$$\left. \begin{aligned} \phi \in W^{1,1}(a, b; R^n), \phi(0) = 0 = \phi(1) \\ \|\phi, W^{1,1}\| < \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Lambda(z) \leq \Lambda(z + \phi).$$

Allora si ha

I) Se per quasi ogni t riesce

$$\dot{z}(t) \in \text{int}(\text{dom} L(z(t), \cdot)),$$

allora esistono $c \in R$ e $p : [a, b] \rightarrow R^n$ misurabile tali che, per quasi ogni t ,

$$p(t) \in \partial_u L(z(t), \dot{z}(t)),$$

$$c = L(z(t), \dot{z}(t)) - p(t)\dot{z}(t).$$

II) Se inoltre L verifica la condizione (H1) e la seguente

$$\forall r > 0, \exists M_r > 0 : \sup\{L(x, u) \mid |x| \leq r, |u| \leq M_r\} < \infty$$

allora $z(\cdot)$ é lipschitziana.

Questo risultato ha motivato il lavoro [4], nel quale viene utilizzato un nuovo "metodo indiretto" per ottenere esistenza e regolarità per problemi di tipo (P).

Supponiamo C chiuso e $K = \text{cono convesso chiuso in } R^n$ (con vertice in 0).

Poniamo

$$\Gamma = \{x(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n) \mid x(a) = \alpha, x(b) = \beta, \dot{x}(t) \in K \text{ q.d.}\},$$

suponiamo che esista $\bar{x}(\cdot)$ tale che

$$\bar{x}(\cdot) \in \Gamma \cap W^{1,\infty}(a, b; R^n), \quad \Lambda(\bar{x}) < \infty$$

e poniamo

$$\Gamma(\bar{x}) = \{x(\cdot) \in \Gamma \mid \Lambda(x) \leq \Lambda(\bar{x})\}.$$

Poniamo anche

$$\lambda'(r) = \inf\{L(t, x, u) - pu \mid p \in \partial_u L(t, x, u), a \leq t \leq b, x \in C, u \in K, |u| < r\}, \quad r > 0,$$

$$\lambda''(r) = \sup\{L(t, x, u) - pu \mid p \in \partial_u L(t, x, u), a \leq t \leq b, x \in C, u \in K, |u| > r\}, \quad r > 0,$$

$$\lambda''_{-1}(s) = \sup[\{r > 0 \mid \lambda''(r) \geq s\} \cup \{0\}], \quad s \in R.$$

Allora le funzioni $\lambda'(\cdot)$, $\lambda''(\cdot)$, $\lambda''_{-1}(\cdot)$ sono monotone decrescenti e si ha

$$\lambda''_{-1}(t) = +\infty \iff t \leq \lambda''(\infty)$$

Fra i risultati principali di [4] figura il seguente

TEOREMA 2. *Supponiamo $L(t, \cdot, \cdot)$ inferiormente semicontinua e $\text{dom} L(t, x, \cdot)$ aperto e non vuoto per ogni t, x, u . Supponiamo inoltre che L verifichi le condizioni (H2) e (H3) seguenti*

(H2) *Se $L(\bar{t}, x, u) < \infty$, allora $L(\cdot, x, u)$ è lipschitziana e si ha, per certe costanti $K_i \geq 0$,*

$$|D_t L(t, x, u)| \leq K_0 L(t, x, u) + K_1$$

per quasi ogni t .

(H3) *Esiste $k > 0$ tale che*

$$i) \mu(\{t \in [a, b] \mid |\dot{x}(t)| < k\}) > 0, \quad \forall x(\cdot) \in \Gamma(\bar{x}),$$

$$ii) \lambda''(\infty) + K_0 \Lambda(\bar{x}) + K_1(b-a).$$

Allora si ha

$$\emptyset \neq \text{Sol}(P) \subset W^{1,\infty}(a, b; R^n)$$

e per ogni soluzione $z(\cdot)$ del problema (P) esistono $c \in R$, $p : [a, b] \rightarrow R^n$ misurabile e $\xi \in L^1(a, b)$ tali che, per quasi ogni t ,

$$p(t) \in \partial_u L(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$\xi(t) \in (\partial_t L)(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$L(t, z(t), \dot{z}(t)) - p(t)\dot{z}(t) = c + \int_a^t \xi(s) ds,$$

$$\|\dot{z}\|_\infty \leq \lambda''_{-1}[\lambda'(k) - K_0 - K_1(b-a)] < \infty$$

Indichiamo alcuni esempi di applicazione del Teorema 2.

E1) Supponiamo L continua e verificante tutte le ipotesi del Teorema 2 tranne (H3), che viene sostituita da (H1). Allora si può supporre C compatto e si ha

$$\lambda''(\infty) = -\infty < \lambda'(r), \forall r > 0$$

ed é verificata la condizione (H3) con $K = R^n$.

E2) $L(x, u) = g(x)\sqrt{1+|u|^2}$, $x \in C$, $u \in R^n = K$,

con $0 < m \leq g(\cdot)$ l.s.c. e localmente limitata su C .

Ancora si può supporre C compatto e $K_i = 0$ e si ottiene

$$\lambda''(\infty) = 0 < \frac{m}{\sqrt{1+k^2}} \leq \lambda'(k), \forall k > 0.$$

E3) $L(x, u) = e^{-u_1} + u_2^2 + u_1 g(x_1, x_2)$, $x \in C$, $K = [0, +\infty]^2$,

con g continua, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = (0, 0)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

con $\beta_i > 0$.

Allora si ha

$$\lambda''(\infty) = 0, \lambda'(k) \geq e^{-k}(1+k) - k^2$$

e la condizione i) di (H3) vale per ogni $k > \beta_1 + \beta_2$ abbastanza piccolo.

E4) $L(t, x, u) = \phi(t)\sqrt{1+u^2}$, $0 \leq t \leq 1$, $K = R$,

$0 < m \leq \phi(t)$ e ϕ di classe C^1 , $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

Si verifica che il Teorema 2 é applicabile se

$$\max\{|\dot{\phi}(t)| \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

é abbastanza piccolo.

Indichiamo i punti fondamentali della dimostrazione del Teorema 2, seguendo [4].

Poniamo

$$T = \{\theta : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\mid \theta \text{ é di classe } C^1, \text{ crescente, convessa, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t)}{t} = +\infty\}$$

e ricordiamo ([2], Theor.10.3.i) che $E \subset L^1(a, b; R^n)$ é debolmente relativamente compatto se e solo se esiste $\theta \in T$ tale che

$$\sup_{f \in E} \int_a^b \theta(|f(t)|) dt < \infty.$$

Se $\theta \in T$, poniamo

$$\Lambda_\theta(x) = \int_a^b \theta(|\dot{x}(t)|) dt, \quad x(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n),$$

$$\Gamma_\theta(\bar{x}) = \{x(\cdot) \in \Gamma(\bar{x}) \mid \Lambda_\theta(x) < \infty\},$$

$$V_\theta(\alpha) = \inf\{\Lambda(x) \mid x(\cdot) \in \Gamma, \Lambda_\theta(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in R,$$

con la convenzione: $\inf \emptyset = +\infty$.

Allora si ha quanto segue

I) V_θ é decrescente, semicontinua inferiormente e $V_\theta(\alpha) < \infty$ per ogni

$$\alpha \geq (b-a)\theta(\|\dot{x}\|_\infty) = \bar{\alpha}.$$

Se $V_\theta(\alpha) < \infty$, allora si ha $V_\theta(\alpha) = \min$ di $\Lambda(x)$.

Questo si prova con i metodi classici del calcolo delle variazioni ([2],[3]).

II) Esiste $\alpha_0 \geq \bar{\alpha}$ tale che $V_\theta(\alpha_0) < \infty$ e

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha) \subset \{0\} \quad \text{per ogni } \alpha \geq \alpha_0.$$

Questo si ottiene dalla successiva Proposizione 1 utilizzando la condizione (H3).

III) Si ha $V_\theta(\alpha) = V_\theta(\alpha_0)$ per $\alpha \geq \alpha_0$.

Questo segue da II) e dalla Propos.6.1 di [4] oppure da [6].

IV) Supposto $V_\theta(\alpha_0) = \Lambda(z_0)$, $\Lambda_\theta(z_0) \leq \alpha_0$, allora si ha

$$\Lambda(z_0) = \min\{\Lambda(x) \mid x(\cdot) \in \Gamma, \Lambda_\theta(x) < \infty\}$$

e $z_0(\cdot) \in W^{1,\infty}(a, b; R^n)$.

Questo segue da III) e dalla Proposizione 1.

V) Per ogni altra $\bar{\theta} \in T$ si ha $\Lambda_{\bar{\theta}}(z_0) < \infty$ e

$$\Lambda(z_0) = \min\{\Lambda(x) \mid x(\cdot) \in \Gamma, \Lambda_{\bar{\theta}}(x) < \infty\}.$$

VI) Per ogni $x(\cdot) \in \Gamma$ esiste $\theta_x \in T$ tale che $\Lambda_{\theta_x}(x) < \infty$ e quindi segue da V)

$$\Lambda(x) \geq \min\{\Lambda(y) \mid y(\cdot) \in \Gamma, \Lambda_{\theta_x}(y) < \infty\} = \Lambda(z_0).$$

Dunque $z_0(\cdot)$ risolve il problema (P), é lipschitziana e dalla Proposizione 1 segue che verifica anche le altre condizioni richieste.

PROPOSIZIONE 1. Supponiamo $L(t, \cdot, \cdot)$ boreliana per ogni t e supponiamo soddisfatta la condizione (H2). Sia $\theta \in T$, $r \geq 0$, $\delta > 0$ e sia $z(\cdot) \in \Gamma$ tale che $\Lambda(z) < \infty$, $\Lambda_\theta(z) < \infty$, $\dot{z}(t) \in \text{int}(\text{dom } L(t, z(t), \cdot))$ per quasi ogni t e

$$\begin{cases} \min[\Lambda(x) + r\Lambda_\theta(x) + \sigma|\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)|^2] = \Lambda(z) + r\Lambda_\theta(z) \\ x(\cdot) \in \Gamma, \Lambda_\theta(x) < \infty, \\ |\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)| \leq \delta \end{cases}$$

Allora esistono $c \in \mathbb{R}$ e le funzioni $\xi(\cdot) \in L^1(a, b)$ e $p(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ misurabile tali che, per quasi ogni t ,

$$\xi(t) \in (\partial_t L)(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$p(t) \in \partial_u L(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$L(t, z(t), \dot{z}(t)) - \dot{z}(t)p(t) + r\theta(|\dot{z}(t)|) - r|\dot{z}(t)|\dot{\theta}(|\dot{z}(t)|) = c + \int_0^t \xi(s) ds$$

Per la dimostrazione poniamo

$$L_1(t, x, u) = L(t, x, u) + r\theta(|u|).$$

Col cambiamento di variabile di integrazione

$$t = \psi(\tau), \text{ con } \psi : [a, b] \xrightarrow[\frac{1}{1-\epsilon}]{\text{su}} [a, b]$$

crescente e lipschitziana si ha

$$I = \int_a^b L_1(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_a^b L_1(\psi(\tau), x(\psi(\tau), \dot{x}(\psi(\tau))) \dot{\psi}(\tau) d\tau.$$

Se $x(\psi(\tau)) = z(\tau)$ per $a \leq \tau \leq b$, allora

$$I = \int_a^b L_1(\psi(\tau), z(\tau), \frac{\dot{z}(\tau)}{\dot{\psi}(\tau)}) \dot{\psi}(\tau) d\tau.$$

Possiamo ottenere una classe di funzioni $\psi(\cdot)$ come sopra ponendo

$$\psi(\tau) = \tau + \int_a^\tau u(\sigma) d\sigma$$

con

$$u(\cdot) \in L^1(a, b), |u(\sigma)| \leq \epsilon < 1, \int_a^b u(\sigma) d\sigma = 0, \quad \epsilon > 0.$$

Affinché la funzione

$$x(t) = z(\psi^{-1}(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

sia ammissibile per il problema che figura nell'enunciato basta prendere $u(\cdot)$ tale che

$$|u(t)| \leq \gamma(t) \leq \epsilon \text{ per } a \leq t \leq b,$$

con $0 < \gamma(t) \leq \epsilon$, $\gamma(\cdot)$ misurabile e tale che per quasi ogni t

$$|u| \leq \gamma(t) \implies \begin{cases} L(t, z(t), \frac{\dot{z}(t)}{1+u}) \in R, \\ |\theta(\frac{|\dot{z}(t)|}{1+u})(1+u) - \theta(|\dot{z}(t)|)| \leq \frac{\delta}{b-a} \end{cases}$$

Per tale funzione $x(\cdot)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b L_1(t, z(t), \dot{z}(t)) dt &= \Lambda(z) + r\Lambda_\theta(z) \leq \Lambda(x) + r\Lambda_\theta(x) + \sigma [\Lambda_\theta(x) - \Lambda_\theta(z)]^2 = \\ &= \int_a^b L_1(\psi(\tau), z(\tau), \frac{\dot{z}(\tau)}{1+u(\tau)})(1+u(\tau)) d\tau + \\ &+ \sigma \left(\int_a^b \theta(\frac{|\dot{z}(\tau)|}{1+u(\tau)})(1+u(\tau)) - \int_a^b \theta(|\dot{z}(\tau)|) d\tau \right)^2. \end{aligned}$$

Ne segue che la terna di funzioni

$$\begin{cases} (\bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t)) = \left(\int_a^t \theta(|\dot{z}(s)|) ds, t \right), & a \leq t \leq b, \\ \bar{u}(t) = 0, & a \leq t \leq b, \end{cases}$$

é soluzione del problema di controllo

$$\begin{cases} \sigma (\phi(b) - \Lambda_\theta(z))^2 + \int_a^b L_1(\psi(t), z(t), \frac{\dot{z}(t)}{1+u(t)})(1+u(t)) dt \rightarrow \min \\ \dot{\phi}(t) = \theta(|\frac{\dot{z}(t)}{1+u(t)}|)(1+u(t)), \quad \phi(a) = 0, \\ \dot{\psi}(t) = 1+u(t), \quad \psi(a) = a, \quad \psi(b) = b, \\ |u(t)| \leq \gamma(t), \end{cases}$$

al quale si applica il Teorema 5.2.1 di [3] e si ottengono $\lambda \in \{0, 1\}$ e $p(\cdot), q(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n)$ tali che, per quasi ogni t ,

$$0 < \lambda + \|p\|_\infty + \|q\|_\infty,$$

$$\dot{p}(t) = 0, \quad \dot{q}(t) \in \lambda(\partial_t L_1)(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$p(b) = 0 \Rightarrow p(t) = 0 \text{ per ogni } t,$$

$$q(t) - \lambda L_1(t, z(t), \dot{z}(t)) \geq q(t)(1+u) - \lambda L_1(t, z(t), \frac{\dot{z}(t)}{1+u})(1+u)$$

per ogni u tale che $|u| \leq \gamma(t)$.

Se $\lambda = 0$, allora si ha $0 \geq \max\{q(t)u \mid |u| \leq \gamma(t)\} = \gamma(t)|q(t)|$ e quindi $q(t) = 0$, e ciò é escluso.

Dunque deve essere $\lambda = 1$ e quindi si ha per $|u| \leq \gamma(t)$

$$L(t, z(t), \frac{\dot{z}(t)}{1+u})(1+u) + r\theta\left(\frac{|\dot{z}(t)|}{1+u}\right)(1+u) - L(t, z(t), \dot{z}(t)) - r\theta(|\dot{z}(t)|) \geq q(t)u$$

e di qui segue

$$L(t, z(t), \dot{z}(t)) - \dot{z}(t)p(t) + r\theta(|\dot{z}(t)|) - r|\dot{z}(t)|\dot{\theta}(|\dot{z}(t)|) \in -\dot{z}(t)\partial_u L(t, z(t), \dot{z}(t))$$

Ora si può prendere una selezione misurabile

$$p(t) \in \dot{z}(t)\partial_u L(t, z(t), \dot{z}(t)) \quad \text{q.d.}$$

tale che

$$\begin{aligned} L(t, z(t), \dot{z}(t)) - \dot{z}(t)p(t) + r\theta(|\dot{z}(t)|) - r|\dot{z}(t)|\dot{\theta}(|\dot{z}(t)|) = \\ = q(t) = q(0) + \int_a^t \dot{q}(s) ds. \end{aligned}$$

Se si pone $c = q(0)$, $\xi(s) = \dot{q}(s)$, questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Vediamo ora come si può provare l'affermazione al punto II) di pag. 5. Dalla decrescenza di V_θ segue $V_\theta(\alpha) < \infty$ per $\alpha \geq \bar{\alpha}$ e

$$\partial^\pi V_\theta(\alpha) \subset]-\infty, 0].$$

Se l'affermazione al punto II) è falsa, per ogni $\alpha_0 \geq \bar{\alpha}$ esistono $\alpha \geq \alpha_0$ e $p < 0$ tali che $p \in \partial^\pi V_\theta(\alpha)$. Poniamo $r = -p > 0$. Dalla definizione di $\partial^\pi V_\theta(\alpha)$ segue che esistono $\delta > 0$ e $\sigma > 0$ tali che, per ogni $\alpha' \in R$,

$$(i) \quad |\alpha - \alpha'| \leq \delta \Rightarrow V_\theta(\alpha') \geq V_\theta(\alpha) - r(\alpha' - \alpha) - \sigma|\alpha' - \alpha|^2.$$

Sia $V_\theta(\alpha) = \Lambda(z)$, $\Lambda_\theta(z) \leq \alpha$.

Deve essere $\Lambda_\theta(z) = \alpha$, poiché da $\Lambda_\theta(z) < \alpha$ segue, per ogni $\epsilon > 0$ tale che

$$\Lambda_\theta(z) \leq \alpha - \epsilon < \alpha,$$

$$\Lambda(z) \geq V_\theta(\Lambda_\theta(z)) \geq V_\theta(\alpha - \epsilon) \geq V_\theta(\alpha) = \Lambda(z),$$

e quindi

$$0 = V_\theta(\alpha - \epsilon) - V_\theta(\alpha) \geq r\epsilon - \sigma\epsilon^2 \Rightarrow r \leq 0.$$

Se poniamo nella formula (i) $\alpha' = \Lambda_\theta(x)$ con $x \in \Gamma$ tale che

$$|\Lambda(x) - \Lambda(z)| \leq \delta,$$

otteniamo

$$\Lambda(x) \geq V_\theta(\Lambda_\theta(x)) \geq V_\theta(\alpha) - r[\Lambda(x) - \Lambda(z)] - \sigma[\Lambda(x) - \Lambda(z)]^2.$$

Ora possiamo applicare la Proposizione 1 e ottenere $c \in R$, $\xi(\cdot) \in L^1(a, b)$, $p(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n)$ tali che

$$(ii) \quad \xi(t) \in (\partial_t L)(t, z(t), \dot{z}(t)), \quad p(t) \in \partial_u L(t, z(t), \dot{z}(t)),$$

$$(iii) \quad L(t, z(t), \dot{z}(t)) - \dot{z}(t)p(t) + r\theta(|\dot{z}(t)|) - r|\dot{z}(t)|\dot{\theta}(|\dot{z}(t)|) - \int_0^t \xi(s) ds = c$$

per quasi ogni $t \in [a, b]$.

Dalla condizione i) di (H3) segue che esiste $t' \in [a, b]$ che verifica le condizioni (ii), (iii) e la seguente

$$|\dot{z}(t')| < k.$$

Ne segue

$$c \geq \lambda'(k) + r \inf_{|u| < k} [\theta(|u|) - |u|\dot{\theta}(|u|)] - \max_t \int_a^t \xi(s) ds.$$

Se supponiamo

$$\mu(\{t \in [a, b] \mid |\dot{z}(t)| > M\}), \quad M > 0,$$

esiste $t'' \in [a, b]$ per il quale valgono le condizioni (ii), (iii) e la seguente

$$|\dot{z}(t'')| > M.$$

Ne segue

$$c \leq \lambda''(M) + \sup_{|u| > M} [\theta(|u|) - |u|\dot{\theta}(|u|)] - \min_t \int_a^t \xi(s) ds.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \theta(t) - t\dot{\theta}(t), \\ \min_{a \leq t \leq b} \int_a^t \xi(s) ds &= \int_a^{t_0} \xi(s) ds, \\ \max_{a \leq t \leq b} \int_a^t \xi(s) ds &= \int_a^{t_1} \xi(s) ds. \end{aligned}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \phi(t) &\longrightarrow -\infty \text{ per } t \longrightarrow +\infty, \\ \lambda'(k) + r\phi(k) &\leq r\phi(M) + \int_{t_0}^{t_1} \xi(s) ds + \lambda''(M) \leq r\phi(M) + \int_a^b |\xi(s)| ds + \lambda''(M). \end{aligned}$$

Si ha poi da (H2)

$$\begin{aligned} |\xi(s)| &\leq K_0 L(s, z(s), \dot{z}(s)) + K_1, \text{ q.d.}, \\ \int_a^b |\xi(s)| ds &\leq K_0 \Lambda(z) + K_1(b-a) \leq K_0 \Lambda(\bar{x}) + K_1(b-a). \end{aligned}$$

Ne segue, ponendo

$$K_2 = K_0 \Lambda(\bar{x}) + K_1(b-a),$$

$$(iv) \quad \lambda'(k) + r\phi(k) \leq r\phi(M) + K_2 + \lambda''(M).$$

Dalla condizione

$$|\dot{z}(t)| \leq M \text{ q.d.}$$

segue

$$\alpha_0 \leq \alpha = \int_a^b \theta(|\dot{z}(t)|) dt \leq \theta(M)(b-a),$$

$$M \geq \theta^{-1} \left(\frac{\alpha_0}{b-a} \right).$$

Dunque, se poniamo

$$M = M(\alpha_0) = \frac{1}{2} \theta^{-1} \left(\frac{\alpha_0}{b-a} \right) \xrightarrow{\alpha_0 \rightarrow \infty} \infty,$$

allora $\mu(\{t \in [a, b] \mid |\dot{z}(t)| > M(\alpha_0)\}) > 0$ e possiamo porre $M = M(\alpha_0)$ nella formula (iv) e passare al limite per $\alpha_0 \rightarrow \infty$ e arrivare all'assurdo

$$R \ni \lambda'(k) + r\phi(k) - \lambda''(\infty) \leq -\infty.$$

Se poniamo $r = 0 = \sigma$ e $V_\theta(\alpha) = \Lambda(z)$, $\alpha \geq \bar{\alpha}$, e supponiamo

$$\mu(\{t \in [a, b] \mid |\dot{z}(t)| > M\}), \quad M > 0,$$

allora quanto detto sopra conduce alla maggiorazione

$$\lambda'(k) \leq \lambda''(M) + K_2$$

e quindi, tenendo conto di (H3),

$$M \leq \lambda''_{-1}[\lambda'(k) - K_2] < \infty.$$

Posto $K_3 = \lambda'(k) - K_2$, ne segue

$$\mu(\{t \in [a, b] \mid |\dot{z}(t)| > M\}) = 0, \quad \forall M > \lambda''_{-1}(K_3)$$

e quindi $\dot{z}(t) \in L^\infty(a, b, R^n)$ e

$$\|\dot{z}\|_\infty \leq \lambda''_{-1}(K_3).$$

Per esporre il risultato fondamentale di [5] consideriamo le seguenti condizioni sul problema (P).

$$(H4) \quad C = \{x \in R^n \mid |x| \leq R\} = C_R, \quad 0 < R < \infty \quad e$$

$$L : [a, b] \times C_R \times R^n \longrightarrow R$$

é localmente lipschitziana.

$$(H5) \quad L(t, x, \cdot) \text{ é convessa e l'insieme}$$

$$W(t, x, p) = \{u \in R^n \mid p \in \partial_u L(t, x, u)\}$$

é limitato, per ogni t, x, p .

Se L verifica le condizioni (H4) e (H5), la funzione $\rho(\cdot)$ data da

$$\rho(s) = \inf\{r \geq 0 \mid \exists t, x, p, u', u'' : u', u'' \in W(t, x, p), |u'| \leq r, |u''| \geq s\}, \quad s \geq 0,$$

ha le proprietà

- i) $0 \leq \rho(s) \leq s$, $\rho(\cdot)$ è crescente e $\rho(s) \rightarrow \infty$ per $s \rightarrow \infty$,
- ii) se $L(t, x, \cdot)$ è strettamente convessa per ogni (t, x) , allora $\rho(s) = s$ per ogni $s \geq 0$.

Consideriamo il problema

$$\left(P_{R,s}^{t_0, \alpha_0; t_1, \alpha_1} \right) \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \rightarrow \min \\ y(\cdot) \in W^{1,1}(a, b; R^n), \quad x(t_i) = \alpha_i, \\ |y(t)| < R \text{ per } t_0 \leq t \leq t_1, \\ |\dot{y}(t)| \leq s \text{ q.d.} \end{cases}$$

e poniamo per ogni $s > r > 0$

$$\Delta_R(r, s) = \inf\{t_1 - t_0 \mid a \leq t_0 < t_1 \leq b, \exists x(\cdot) \in \text{Sol} \left(P_{R,s}^{t_0, \alpha_0; t_1, \alpha_1} \right) :$$

$$\mu(\{t \in [t_0, t_1] \mid |\dot{x}(t)| < r + \epsilon\}) > 0 \text{ per ogni } \epsilon > 0,$$

$$\mu(\{t \in [t_0, t_1] \mid |\dot{x}(t)| > \rho(s) - \epsilon\}) > 0 \text{ per ogni } \epsilon > 0,$$

$$t_0 < \tau_0 < \tau_1 < t_1 \Rightarrow \|\dot{x}, L^\infty(\tau_0, \tau_1)\| < s\}$$

Se L verifica le condizioni (H4) e (H5) si ha

$$\text{i) } \Delta_R(r, s) \text{ è crescente su } \rho^{-1}([r, +\infty]),$$

$$\text{ii) } \rho(\rho(s)) > r \Rightarrow \Delta_R(r, s) > 0.$$

Ora possiamo enunciare il risultato fondamentale di [5], dato dal seguente teorema

TEOREMA 3. Supponiamo che siano verificate le condizioni (H4), (H5) e le seguenti

(H6) Esiste $\bar{\alpha} > 0$ tale che

$$L(t, x, u) \geq \bar{\alpha}|u|$$

per ogni t, x, u .

(H7) Esistono $\bar{x}(\cdot) \in \Gamma \cap W^{1,\infty}(a, b; R^n)$ e $\alpha \in]0, \bar{\alpha}[$ tali che

$$R > \frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha} + \min\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

(H8) Esiste $\bar{s} > 0$ tale che

$$\rho(\bar{s}) > \frac{\Lambda(\bar{x})}{\alpha(b-a)} = \bar{r},$$

$$\Delta_R(\bar{r}, \bar{s}) \geq b - a.$$

Allora si ha

$$\emptyset \neq \text{Sol}(P) \subset W^{1,\infty}(a, b; R^n)$$

e per ogni soluzione $z(\cdot)$ del problema (P) si ha

$$\max_{a \leq t \leq b} |z(t)| < R.$$

Anche in questo caso per la dimostrazione in [5] viene utilizzato un "metodo indiretto", che consiste nell'applicazione di note condizioni necessarie alle soluzioni di opportune famiglie di problemi ausiliari di tipo tradizionale. Prima si ottiene l'esistenza di una soluzione $z(\cdot)$ in $W^{1,\infty}$. Successivamente si prova che $z(\cdot)$ è anche soluzione in $W^{1,1}$ e che ogni altra soluzione in $W^{1,1}$ in realtà appartiene a $W^{1,\infty}$.

Terminiamo con due esempi.

E5) Supponiamo soddisfatte le condizioni (H4), (H5) e la seguente

$$\lambda''(\infty) = -\infty.$$

Supponiamo che sia verificata anche una delle condizioni

- a) L non dipende da t ;
- b) esistono $c > 0$ e $g(\cdot) \in L^1$ tali che, per ogni $t, x, u, (\xi, \eta) \in \partial_{x,u} L(t, x, u)$ si ha

$$|\xi| \leq |\eta| + g(t);$$

- c) posto

$$H(t, x, p) = \sup\{pu - L(t, x, u) \mid u \in R^n\},$$

esistono $c > 0$ e $g(\cdot) \in L^1$ tali che

$$|D_t H(t, x, p)| \leq c|H(t, x, p)| + g(t)$$

per ogni (t, x, p) in cui esiste la derivata $D_t H(t, x, p)$.

Allora per ogni $r > 0$ esiste $s_r > r$ tale che

$$\Delta_R(r, s) = +\infty \text{ per } s > s_r.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [5].

E6) Consideriamo la funzione localmente lipschitziana

$$H : R \times R^{2n} \longrightarrow R$$

che verifica le condizioni

i) $H(t, \cdot)$ é convessa e

$$H(t, x) \geq \theta(|x|),$$

con θ convessa e tale che

$$\frac{\theta(r)}{r} \longrightarrow \infty \quad \text{per } r \longrightarrow \infty;$$

ii) esistono le costanti $C_0 > 0$ e $T > 0$ tali che

$$H(t, x) \leq \frac{C_0^2}{2T} + \inf_{r \geq 0} \theta(r) \quad \text{per } |x| \leq C_0, \quad 0 \leq t \leq T;$$

iii) esiste una costante $C_1 \geq 0$ tale che

$$|D_t H(t, x)| \leq C_1(1 + |H(t, x)|)$$

per ogni (t, x) in cui esiste la derivata $D_t H(t, x)$.

Poniamo

$$J = \begin{pmatrix} O - I_n \\ I_n \quad O \end{pmatrix},$$

ove I_n rappresenta la matrice-unità $n \times n$, e poniamo

$$L(t, x, u) = \frac{1}{2} u J x + \sup_{y \in R^{2n}} [y J u - H(t, y)].$$

Allora il problema (P), con $R = C_0$, $a = 0$, $b = T$, $\alpha = 0 = \beta$, ha una soluzione $z(\cdot) \in W^{1, \infty}$.

Inoltre esiste una costante k tale che, posto

$$v(t) = z(t) + k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

si ha

$$\begin{cases} J \dot{v}(t) \in \partial_x H(t, v(t)) & \text{q.d.} \\ v(0) = v(T) \end{cases}$$

Anche per questo rimandiamo a [5].

BIBLIOGRAFIA

1. L. Ambrosio, O. Ascenzi, G. Buttazzo, *Lipschitz regularity for minimizers of integral functionals with highly discontinuous integrands*, J. Math. Anal. Appl. **142** (1989), 301–16.
2. L. Cesari, *Optimization-Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1983.
3. F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley Interscience, New York, 1983.
4. F. H. Clarke, *An indirect method in the calculus of variations*, Trans. A. M. S. **336**, 2 (1993), 655–73.
5. F. H. Clarke, P. H. Loewen, *An intermediate existence theory in the calculus of variations*, Annali S. N. Sup. Pisa (4) **16** (1989), 487–526.
6. F. H. Clarke, M. Redheffer, *The proximal subgradient and constancy*, Canad. Math. Bull. **36**, 1 (1993), 30–32.
7. R. T. Rockafellar, *Dualization of subgradient conditions for optimality*, Nonlin. Anal. T. M. Appl. **20**, 6 (1993), 627–46.